

高次元回転行列の補間とその応用

高橋 友和^{†,‡,*}, Lina[†], 井手 一郎[†], 目加田 慶人^{††}, 村瀬 洋[†]

[†]名古屋大学 大学院情報科学研究科

[‡]日本学術振興会

^{††}中京大学 生命システム工学部

1 まえがき

本稿では、高次元回転行列の補間手法を提案し、その応用として、多次元物体の姿勢補間と多次元正規分布の補間の例を示す。

コンピュータグラフィクスの分野では、3次元空間中の物体の姿勢補間に関する研究が数多く行われており、回転の表現にはクォータニオン [1, 2] がよく用いられる。これに対して、4次元以上の空間における物体の運動解析の研究例は少ない [3]。これは、我々が存在する空間が3次元であり、そのような解析に対する需要が少ないことが原因の一つと考えられるが、より高次元の空間を考えることによって、例えば1次元の単振動が2次元の回転運動として観測されるというような新たな発見が生まれるかもしれない。一方、現実世界の信号パターンを高次元の特徴空間を用いて表現するパターン認識 [4] の分野では、空間の次元が数百にも及ぶ場合があり、このような高次元空間においてパターンの軌跡を解析することは有用であると考えられる。

以下、2節で提案する n 次元回転行列の補間手法を述べ、3節でコンピュータグラフィクスの分野と関連する多次元物体の姿勢補間の例を、4節でパターン認識の分野と関連する多次元正規分布の補間の例をそれぞれ示す。

2 n 次元回転行列の補間

2.1 回転行列の対角化

n 次元の実正方行列 ${}_nR$ が以下の条件を満たすとき、 ${}_nR$ は回転行列となる。

$${}_nR {}_nR^T = {}_nR^T {}_nR = {}_nI, \quad \det({}_nR) = 1 \quad (1)$$

“Interpolation of High-Dimensional Rotation Matrix and its Applications” by Tomokazu TAKAHASHI^{†,‡,*}, Lina[†], Ichiro IDE[†], Yoshito MEKADA^{††} and Hiroshi MURASE[†] ([†]Graduate School of Information Science, Nagoya University, [‡]Japan Society for the Promotion of Science, ^{††}School of Life System Science and Technology, Chukyo University) .

*) E-mail: ttakahashi@murase.m.is.nagoya-u.ac.jp

A^T は A の転置行列を、 ${}_nI$ は n 次元の単位行列を表す。また、 ${}_nR$ は n 次元のユニタリ行列 ${}_nU$ と複素数を要素に持つ対角行列 ${}_nD$ を用いて以下のように対角化できる。

$${}_nR = {}_nU {}_nD {}_nU^\dagger \quad (2)$$

ここで、 A^\dagger は A の複素共役転置行列を表す。また、任意の実数 x について、以下の式が成り立つ。

$${}_nR^x = {}_nU {}_nD^x {}_nU^\dagger \quad (3)$$

$0 \leq x \leq 1$ のときに ${}_nR^x$ は ${}_nR$ を内挿する回転を、それ以外のときに外挿を表す。つまり、任意の ${}_nR$ が与えられたとき、 ${}_nU$ を一度求めるだけで、 ${}_nR$ の内挿と外挿が簡単に計算できる。

2.2 対角化の幾何学的な意味

回転角度パラメータ θ ($-\pi < \theta \leq \pi$) を用いた2次元の回転行列 ${}_2R(\theta)$ は、以下のように対角化できる

$${}_2R(\theta) = {}_2U {}_2D(\theta) {}_2U^\dagger \quad (4)$$

ここで、

$${}_2R(\theta) = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}, \quad (5)$$

$${}_2D(\theta) = \begin{bmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta} \end{bmatrix}. \quad (6)$$

ただし、 $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$ (オイラーの等式、 $|e^{i\theta}| = |e^{-i\theta}| = 1$) である。さらに、実数 x に対して ${}_2D(\theta)^x = {}_2D(x\theta)$ となるから、 ${}_2R(\theta)^x = {}_2R(x\theta)$ が成り立つ。

${}_nR$ の固有方程式は、 $n = 2m$ (偶数次元) のとき、絶対値1の m 組の複素共役解を持ち、 $n = 2m + 1$ (奇数次元) のとき、1と絶対値1の m 組の複素共役解を持つ [5] から、式2の ${}_nD$ は m 次元のパラメータベクトル $\theta = (\theta_j) - \pi < \theta_j \leq \pi, j = 1, 2, \dots, m$ を用いて、以

下のように表現できる．

$$\begin{cases}
 {}_n\mathbf{D}(\boldsymbol{\theta}) = \begin{bmatrix} {}_2\mathbf{D}(\theta_1) & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & {}_2\mathbf{D}(\theta_m) \end{bmatrix} & (n = 2m) \\
 \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & {}_2\mathbf{D}(\theta_m) \end{bmatrix} & (n = 2m + 1)
 \end{cases} \quad (7)$$

また，式 2 は以下のように表現できる．

$${}_n\mathbf{R}(\boldsymbol{\theta}) = {}_n\mathbf{U} {}_n\mathbf{D}(\boldsymbol{\theta}) {}_n\mathbf{U}^\dagger \quad (8)$$

よって，式 3 の ${}_n\mathbf{R}^x$ は ${}_n\mathbf{R}(x\boldsymbol{\theta})$ の形，すなわち単なる θ の線形補間として一意に計算できる．

さらに，式 4 を用いて以下のように変形する．

$${}_n\mathbf{R}(\boldsymbol{\theta}) = {}_n\mathbf{U} {}_n\mathbf{U}'^\dagger {}_n\mathbf{R}'(\boldsymbol{\theta}) {}_n\mathbf{U}' {}_n\mathbf{U}^\dagger \quad (9)$$

ここで， $n = 2m + 1$ のとき，

$${}_n\mathbf{R}'(\boldsymbol{\theta}) = \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 0 \\ & {}_2\mathbf{R}(\theta_1) & \vdots \\ \vdots & & \ddots \\ 0 & \cdots & {}_2\mathbf{R}(\theta_m) \end{bmatrix}, \quad (10)$$

$${}_n\mathbf{U}' = \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 0 \\ & {}_2\mathbf{U} & \vdots \\ \vdots & & \ddots \\ 0 & \cdots & {}_2\mathbf{U} \end{bmatrix}. \quad (11)$$

また， $n = 2m$ のときの ${}_n\mathbf{R}'(\boldsymbol{\theta}) {}_n\mathbf{U}'$ は，式 7 と同様に式 10，11 の 1 行目と 1 列目を削った形となる． n 次の回転行列全体の集合は乗算に対して $\text{SO}(n)$ (Special Orthogonal group [6, 7]) と呼ばれる連続群を作るから， ${}_n\mathbf{U} {}_n\mathbf{U}'^\dagger$ は式 1 を満たす回転行列 ${}_n\mathbf{R}''$ に変換可能であり， ${}_n\mathbf{R}(\boldsymbol{\theta})$ は実数の回転行列のみを用いて以下のように表現することができる．

$${}_n\mathbf{R}(\boldsymbol{\theta}) = {}_n\mathbf{R}'' {}_n\mathbf{R}'(\boldsymbol{\theta}) {}_n\mathbf{R}''^T \quad (12)$$

この表現を用いることにより，単純に複素行列から実行列に変化したという意味において，回転行列を補間する際のメモリ効率，計算効率の向上が期待できる．ただし，補間結果は，式 2 の単純な対角化を行ったときと等価である． ${}_n\mathbf{R}'(\boldsymbol{\theta})$ は m 個の独立な回転平面による回転を表し，ある回転が他の回転平面による回転に影響を与える

ことはない．つまり式 12 は，ある固有の姿勢への回転 ${}_n\mathbf{R}''$ ，互いに独立な回転平面での回転 ${}_n\mathbf{R}'(\boldsymbol{\theta})$ ，もとの姿勢に戻す回転 ${}_n\mathbf{R}''^T$ の 3 つの回転によって ${}_n\mathbf{R}(\boldsymbol{\theta})$ を表現している．

3 多次元物体の姿勢補間

3.1 2 つの回転行列の間の補間

物体の姿勢は，ワールド座標系に対するオブジェクト座標系の相対的な回転によって定義されるため， n 次元物体の任意の姿勢は， n 次元の回転行列によって一意に表現できる．物体の 2 つの姿勢を回転行列 $\mathbf{R}_0, \mathbf{R}_1$ で表すとき，その 2 つの姿勢から補間される \mathbf{R}_x は以下の式で表せる．

$$\mathbf{R}_x = \mathbf{R}_{0 \rightarrow 1}(x\boldsymbol{\theta}) \mathbf{R}_0 \quad (13)$$

ここで， $\mathbf{R}_{a \rightarrow b}(\boldsymbol{\theta}) = \mathbf{R}_b \mathbf{R}_a^T$ である．式 13 は回転行列の線形補間に相当している．

3.2 4 次元立方体の姿勢補間と可視化

4 次元立方体に対して 2 つの姿勢を設定し， x を変化させたときの補間結果を可視化した．姿勢補間の様子を図 1 に示す．回転している様子をわかりやすくするために頂点の 1 つについて，その軌跡を黒丸で描画してある．

可視化を行う際には， n 次元空間から 2 次元空間へ投影を行う必要がある．ここでは，投影方法を透視投影 [8] とし，具体的には以下のように投影した． n 次元空間中のベクトルの斉次座標表現を ${}_n\tilde{\mathbf{y}} = [y_1, y_2, \dots, y_n, 1]^T$ ，投影後の 2 次元ベクトルを ${}_2\tilde{\mathbf{y}}' = [y'_1, y'_2, 1]^T$ とするとき，

$$\begin{aligned}
 \kappa {}_2\tilde{\mathbf{y}}' &= \mathbf{P}_{n \rightarrow 2} {}_n\tilde{\mathbf{y}} \\
 &= \prod_{i=2}^{n-1} \mathbf{P}_{i+1 \rightarrow i} {}_n\tilde{\mathbf{y}}.
 \end{aligned} \quad (14)$$

ここで κ は，右辺と左辺の同値関係を成立させるための係数であり， $\mathbf{P}_{a \rightarrow b}$ は b 行 $a (> b)$ 列の投影行列を表す．また，

$$\mathbf{P}_{i+1 \rightarrow i} = \begin{bmatrix} f & & \cdots & 0 \\ & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & f & \\ 0 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (15)$$

ただし， f は焦点距離である．

4 多次元正規分布の補間

4.1 超楕円体の姿勢補間

多次元正規分布の等確率密度の点の集合は超楕円面を形成することから，2 つの異なる多次元正規分布の間の，補間したい分布の平均ベクトルと共分散行列の固有値，固有ベクトルを，楕円体の中心の移動，主軸の伸縮，姿

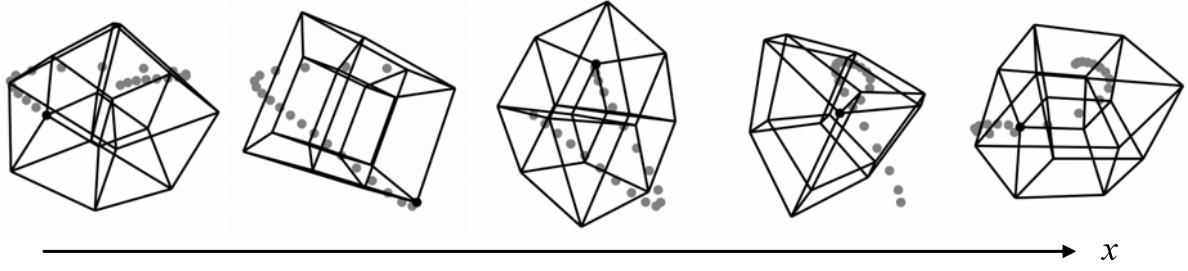


図 1: 4次元立方体の姿勢補間

勢の回転を用いて補間する．ここで，2つの楕円体の間の楕円体の補間を考えたとき，楕円体間の主軸の対応付け方法がその組み合わせ数だけ存在することと，楕円体の対称性により2つの主軸が形成する回転平面での回転角が $\theta + a\pi$ (a は任意の整数)の形で無数に表現できることから，一般的にそれらの間を補間する楕円体を一意に定めることはできない．これに対して，ここでは以下の2つの条件を設けることによって楕円体の補間方法を一意に定める．

[条件 1] 主軸の伸縮による体積変化を最小とする

[条件 2] 回転による姿勢の変化を最小とする

具体的には，楕円体の主軸の伸縮，姿勢の回転に関して，[条件 1]より，主軸に相当する固有ベクトルを固有値の大きい順に対応付ける．また，[条件 2]より，対応付けられた固有ベクトルのなす角度の絶対値が π 以上である場合には，一方の固有ベクトルの符号を反転させる．

μ を n 次元の平均ベクトル， Σ を $n \times n$ の共分散行列として，2つの多次元正規分布を $N_0(\mu_0, \Sigma_0)$ ， $N_1(\mu_1, \Sigma_1)$ で表すとき，任意の実数 x によってその間を内挿，あるいは外挿する $N_x(\mu_x, \Sigma_x)$ を以下のように算出する．

μ_x は，単純な線形補間を用いて以下のように算出する．

$$\mu_x = (1-x)\mu_0 + x\mu_1 \quad (16)$$

Σ_0, Σ_1 の各固有ベクトルを列ベクトルとし，固有値の大きい順に並べ，式 1 を満たす回転行列となるように作成した行列を，それぞれ E_0, E_1 とする．また，そのときの固有値 $\lambda_{0j}, \lambda_{1j}$ ($j = 1, 2, \dots, n$)を並べたベクトルをそれぞれ λ_0, λ_1 とする． Σ_x の固有値 λ_{xj} ($j = 1, 2, \dots, n$)を以下のように算出する．

$$\lambda_{xj} = ((1-x)\sqrt{\lambda_{0j}} + x\sqrt{\lambda_{1j}})^2 \quad (17)$$

また，固有ベクトルの行列 E_x を以下のように算出する．

$$E_x = R_{0 \rightarrow 1}(x\theta)E_0 \quad (18)$$

ここで， $R_{0 \rightarrow 1}(\theta) = E_1E_0^T$ である．そして， Σ_x は以下のように算出できる．

$$\Sigma_x = E_x \Lambda_x E_x^T \quad (19)$$

ここで， Λ_x は λ_{xj} ($j = 1, 2, \dots, n$)を対角要素とする対角行列である．

4.2 実画像を用いた検証実験

様々な光源環境の下で異なるカメラアングルから撮影された顔画像群を使用して，多次元正規分布の補間に関する実験を行った．光源環境の変化を観測時のノイズと考え，カメラアングル毎に顔画像群を多次元正規分布として表現し，それらの間の分布を補間する際，提案手法を利用する場合と利用しない場合での補間精度を比較することにより，提案手法の妥当性と有効性を検証した．

実験では顔画像データベース“Yale Face Database B”[9]を使用し，45種類の光源環境下，2つのカメラアングルから撮影された1人の人物画像の顔領域を切り出し，それぞれ 28×32 ピクセルに伸縮して用いた．図 2 に実験に用いた2つのカメラアングルからの画像の例を示す．

はじめに，画像の画素値を並べたベクトルを全画像について作成し，それらを主成分分析することにより，11次元の低次元特徴空間を作成し，各画像をその特徴空間内のベクトルとして表現した．次に，カメラアングル毎に多次元正規分布を作成し，それらの間を補間して得られる分布とそれらのちょうど中間のカメラアングルから実際に得られた画像群の分布の間の距離を計算した．距離尺度には，分布間距離として一般的に用いられるパッチャリア距離 [4] を用いた．提案手法の比較手法として，次式のように単純に共分散行列の各要素を線形補間する手法を用いた．

$$\Sigma_x = (1-x)\Sigma_0 + x\Sigma_1 \quad (20)$$

なお，補間処理の実装や実験で用いた行列・数値計算，画像処理にはソフトウェアライブラリ MIST[10] を使用



図 2: 実験に用いた画像の例

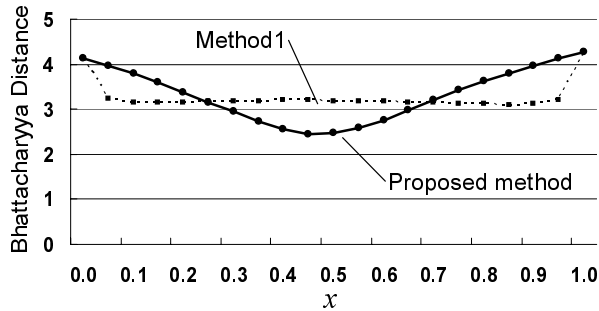


図 3: 実験結果

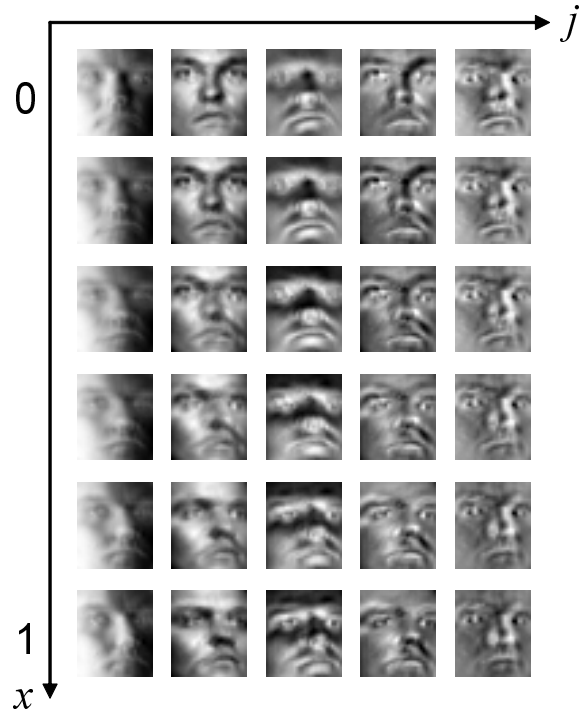


図 4: 補間された固有ベクトル

した．図 3 に，提案手法 (Proposed method)，比較手法 (Method1) によって x を変化させながら補間した分布と実際の分布との間の距離を示す．また，図 4 に提案手法によって補間された固有ベクトルの一部を画像化したものを示す．

図 3 より，提案手法によって補間された分布は，ちょうど中間の $x = 0.5$ 付近において実際の分布に最も接近していることから，提案手法による分布間補間の妥当性が示された．また，その距離が比較手法によって補間された分布のものよりも小さいことから，分布間を回転を用いて補間することの有効性が示された．

5 まとめ

本稿では，高次元回転行列の補間手法を提案し，その応用として，多次元物体の姿勢補間と多次元正規分布の補間の例を示した．

今回は回転行列の線形 (1 次) 補間のみを扱ったが，今後は 3 次スプライン補間などのより高次の補間手法を検討していきたい．また，4 節で示した多次元正規分布の補間に関して，固有ベクトルの対応付け方法の改善や実際の画像認識問題への適用についても検討したい．

謝辞

日頃より熱心に御討論頂く名古屋大学村瀬研究室諸氏に感謝する．本研究の一部は日本学術振興会科学研究費補助金，21 世紀 COE プログラム「社会情報基盤のた

めの音声・映像の知的統合」による．本研究では顔画像データベース “Yale Face Database B” [9] を用いた．

参考文献

- [1] 金谷一郎，“3D-CG プログラマーのためのクォータニオン入門”，第二 I/O 編集部 (編)，工学社，2004 年．
- [2] 金谷一郎，“3D-CG プログラマーのための実践クォータニオン”，第二 I/O 編集部 (編)，工学社，2004 年．
- [3] 渡辺啓蔵，“超表面の擬似反射による 4 次元超立体の可視化”，日本バーチャルリアリティ学会論文誌，Vol. 10, No. 3, pp. 437-442, 2005.
- [4] Richard O. Duda, Peter E. Hart and David G. Stork, “Pattern Classification (Second Edition),” John Wiley & Sons, Inc., 2001.
- [5] 佐武一郎，“線型代数学 (第 64 版)，” 裳華房，2006 年．
- [6] 平井武，“線形代数と群の表現 I (第 5 刷)，” 朝倉書店，2006 年．
- [7] 平井武，“線形代数と群の表現 II (第 3 刷)，” 朝倉書店，2004 年．
- [8] 佐藤淳，“コンピュータビジョン - 視覚の幾何学 - (第 4 刷)，” コロナ社，2003 年．
- [9] A. S. Georghiades, P. N. Belhumeur and D. J. Kriegman, “From Few to Many: Illumination Cone Models for Face Recognition under Variable Lighting and Pose,” IEEE Trans. Pattern Anal. Mach. Intelligence, Vol. 23, No. 6, pp. 643-660, 2001.
- [10] <http://mist.suenaga.m.is.nagoya-u.ac.jp>